

«امتحان نخبان»

پایخ دهنده: رضوان عباسی

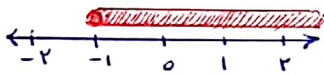
(الف) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{2, 4, 6, 7\}$ و $C = \{1, 2, 7, 8\}$

$A \cap B = \{2, 4\}$

$C - (A \cap B) = \{1, 2, 7, 8\} - \{2, 4\} = \{1, 7, 8\}$

$n(S) = 6 \times 6 = 36$

$A = \{(1, 1)\} \Rightarrow n(A) = 1 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{36}$



$\sqrt{(3-\sqrt{8})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{8})^2} = \underbrace{|3-\sqrt{8}|}_{\text{مثبت}} + \underbrace{|1-\sqrt{8}|}_{\text{منفی}}$
 $= (3-\sqrt{8}) - (1-\sqrt{8}) = 3-\sqrt{8}-1+\sqrt{8} = 3-1 = 2$

(الف) فرض: $ABCD$ متوازی الاضلاع است
 ضلع AD و BC موازی است
 ضلع AB و DC موازی است
 نقطه M وسط AB است
 نقطه N وسط DC است
 نقطه P وسط AD است
 نقطه Q وسط BC است
 حکم: $\overline{MN} = \overline{PQ}$

$AB = DC \xrightarrow{\div 2} MB = DP$
 $AD = BC \xrightarrow{\div 2} QD = BN$

فرض $\triangle QDP \cong \triangle MBN$
 خاصیت متوازی الاضلاع: $\hat{D} = \hat{B}$
 $\overline{MN} = \overline{PQ}$

(الف) $\frac{3^4 \times 5^4}{15^{-2}} = \frac{15^4}{15^{-2}} = 15^{4-(-2)} = 15^6$

(ب) $(\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{27}) \div \sqrt{3}$
 $= (2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \div \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \div \sqrt{3} = 3$

$\begin{cases} \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \\ \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \\ \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = \sqrt{9} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} \end{cases}$

(۱) درستی یا نادرستی

(الف) نادرست

تعریف داده شده مربوط به اشتراک دو مجموعه A و B است.

(ب) درست

(ج) نادرست

از هر نقطه خارج یک دایره، دو خط مماس بر آن دایره می توان رسم کرد.

(د) نادرست

خطی که از مبدأ مختصات عبور کند عرض از مبدأ ندارد (عرض از مبدأ خط صفر است)

(۲) جای خالی:

(الف) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

(الف) -2

(ب) 7

منظور از درجه نسبت به x و y در این سه جمله ای: بیشترین مجموع توانهای

$3+4=7$

مربوط به x و y است.

(ج) $x = 5$
 $3x - 15 = 0 \rightarrow 3x = 15 \xrightarrow{\div 3} x = 5$

کسری که مخرجش صفر باشد را تعریف نشده می گویند.

(۳) $+2$

برای تعیین شیب خط باید معادله خط داده شده را به فرم $y = ax + b$

تبدیل کنیم $4x - 2y = 8 \Rightarrow -2y = -4x + 8$

شیب: $+2$
 $\xrightarrow{\div (-2)} y = +2x - 4$

عرض از مبدأ: -4

(۴) سوالات ۴ گزینه ای:

(الف) گزینه (۳)

نکته: عضوهای یک مجموعه باید کاملاً مشخص و متمایز باشند در انتخاب عضوها

نباید سلیقه ای عمل کنیم.

در گزینه (۳) مجموعی مورد نظر نمی است.

(ب) گزینه (۳)

$\{x \in \mathbb{N} \mid -3 \leq x < 3\} = \{1, 2\}$

(ج) گزینه (۱)

اگر متغیر داخل رادیکال و یا قدر مطلق باشد و یا در خارج کسر باشد عبارت مورد

نظر یک جمله ای نیست.

(د) گزینه (۱) اگر شیب منفی باشد خط به فرم \setminus رسم می شود و اگر عرض از مبدأ

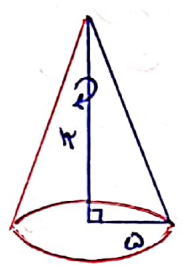
خط مثبت باشد، خط محور عرض ها را در نقطه ای مثبت قطع می کند.

(۱۳)

$$\frac{3x^3 - 2x^2 + 4x + 5}{-3x^3 - 3x^2} \cdot \frac{x+1}{3x^2 - 5x + 9}$$

$$\frac{-5x^2 + 4x}{+5x^2 + 5x} = \frac{3x^2 - 5x + 9}{-4}$$

خارج قسمت : $3x^2 - 5x + 9$
باقی مانده : -4

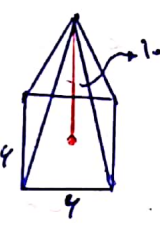


(۱۴) الف) نکته: از دوران یک مثلث قائم الزاویه حول یکی از ضلع های قائم یک مخروط پدید می آید.

ب)

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} (\pi \times 5^2) \times 12 = 100\pi$$

(حجم مخروط)



(الف) (۱۵)

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} (4 \times 4) \times 10 = 120 \text{ cm}^3$$

(حجم هرم)

ب)

$$S = 4\pi R^2 \xrightarrow{R=10} S = 4\pi(10^2) = 400\pi \text{ cm}^2$$

(مساحت کره)

(۱۶)

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow (\text{حجم کره}) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$R=3 \Rightarrow V = \frac{4}{3} \pi (3^3) = 18\pi \text{ cm}^3$

(۱۷)

$$\text{الف) } (2a-5)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(5) + (5)^2 = 4a^2 - 20a + 25$$

ب) $(2a-3b)(2a+3b) = (2a)^2 - (3b)^2 = 4a^2 - 9b^2$

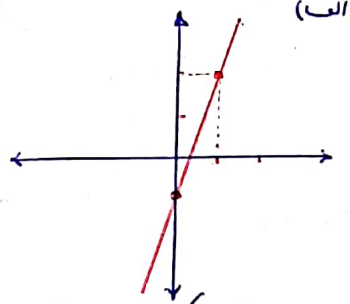
(۱۸)

$$\text{الف) } x^2 - 49 = (x-7)(x+7)$$

ب) $y^2 - y - 12 = (y-4)(y+3)$

(الف) (۱۹)

x	0	1
y	-1	2
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



با ابتدا سبب خط گذرنده از دو نقطه A و B را بدست می آوریم.

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - (-1)}{1 - 0} = \frac{3}{1} = 3$$

پس به کمک یکی از نقاط و با گذاری مشخصات آن نقطه در معادله $y = ax + b$ عرض از مبدأ خط را نیز بدست می کنیم.

$$y = ax + b \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}} \begin{matrix} (1) = 3(1) + b \\ \Rightarrow 1 = 3 + b \\ \Rightarrow b = -2 \end{matrix}$$

معادله خط: $y = 3x - 2$

(۲۰)

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \xrightarrow{x(-2)} \begin{cases} -x - 4y = -6 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases} \xrightarrow{-1y = -2} y = +2$$

$y = +2 \Rightarrow x + 2(2) = 3 \Rightarrow x + 4 = 3 \Rightarrow x = -1$

(۲۱) الف)

$$\frac{12a^3b^2}{18a^2b^4} = \frac{2a}{3b^2}$$

ب)

$$\frac{x^2 - 10x + 21}{x^3} \times \frac{x^2}{x-3} = \frac{(x-7)(x-3)}{x^3} \times \frac{x^2}{x-3} = \frac{x-7}{x}$$

(۲۲)

$$\frac{5a^2}{a^2-1} - \frac{2a}{a+1} = \frac{5a^2}{(a-1)(a+1)} - \frac{2a}{a+1} = \frac{5a^2 - 2a(a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{5a^2 - 2a^2 + 2a}{(a-1)(a+1)} = \frac{3a^2 + 2a}{(a-1)(a+1)}$$